KORELAČNÍ ANALÝZA INTERFEROGRAMŮ

J.Novák, A.Mikš

Katedra fyziky, FSv ČVUT, Praha

Abstrakt

V práci je popsána jednoduchá metoda kontroly tvaru obecných optických ploch pomocí metod korelační analýzy. Navržená metoda nevyžaduje provádět detailní analýzu interferenčního pole, tj. určování tvaru a řádu interferenčních proužků jak je tomu u stávajících metod. Odchylka kontrolované plochy od jejího nominálního tvaru je charakterizována hodnotou korelačního koeficientu mezi měřeným vlnovým polem a vlnovým polem odpovídajícím nominálnímu tvaru plochy. Minimalizací korelačního koeficientu pak získáme informaci o odchylce měřené plochy od jejího nominálního tvaru. Metoda je univerzální a je použitelná i pro kontrolu rovinných a sférických ploch. V článku jsou ukázány výsledky počítačové simulace této metody v prostředí MATLAB.

1. Úvod

V optické výrobě je jednou z nejdůležitějších úloh vyrobit plochy optických prvků tak, aby splňovaly požadavky na ně kladené co nejlépe a odpovídaly svým tvarem a tolerancemi výkresové dokumentaci daného optického prvku. V případě výroby optických prvků s rovinnými nebo sférickými plochami je situace značně jednodušší než při výrobě optických prvků s asférickými plochami. Jde-li totiž o výrobu optického prvku s rovinnými nebo sférickými plochami, zjišťujeme jejich odchylky od nominálního tvaru srovnáním vyráběné rovinné nebo sférické plochy s referenční plochou, která je opět rovinná nebo sférická. Optickému prvku majícímu optickou plochu definovaného tvaru říkáme kalibr [1,2]. Těmto referenčním plochám říkáme také někdy kalibrační plochy. Vyrobená optická plocha, ať již rovinná nebo sférická, má správný tvar, nevidíme-li žádné interferenční proužky mezi vyrobenou plochou a kalibrem, který na tuto plochu přiložíme.

V případě výroby asférických ploch je však situace komplikovanější, neboť je velmi složité vyrobit kalibr na asférickou plochu a tuto potom tímto kalibrem měřit. V praxi se to potom nejčastěji provádí tím způsobem, že kontrolovanou asférickou plochu srovnáváme se sférickou plochou, která se jí co nejvíce přimyká. Mezi asférickou plochou a sférickou plochou kalibru pak vznikne soustava interferenčních proužků, které svým tvarem a polohou charakterizují tvar asférické plochy a to v případě, že měřená plocha a plocha kalibru jsou vůči sobě ve správné poloze tj. jsou v případě rotačně symetrických asférických ploch souosé a mají definovanou axiální vzdálenost. Tyto podmínky lze při výrobě asférických ploch velmi obtížně splnit a proto je kontrola asférických ploch i v dnešní době poměrně složitý problém. Lze sice navrhnout pro každou asférickou plochu nulový kalibr na bázi difraktivního optického prvku, jedná se však o proces velmi zdlouhavý a finančně značně náročný. Podstatně přesnější výsledky měření tvaru optických ploch lze dosáhnout použitím interferometrů a to nejčastěji Fizeauova nebo Twyman-Greenova typu [1,2].

Cílem této práce je navržení jednoduché kontrolní metody, která by odstraňovala nedostatky výše uvedených metod a umožňovala zrychlit proces kontroly asférických ploch. Vzhledem k tomu, že rovinná a sférická plocha jsou jen zvláštními případy plochy asférické, bude možno tuto metodu beze změny použít též pro kontrolu ploch rovinných a sférických. V další části je stručně popsán princip korelační analýzy interferogramů, která je prováděna v prostředí systému Matlab s použitím procedur pro analýzu dat a nelineární optimalizaci.

2. Korelační analýza interferogramů

Uvažujme dvě náhodné veličiny X a Y a hledejme podmínku pro minimální rozptyl funkce

$$U = Y - kX.$$

Parametr k máme určit tak, aby funkce U měla minimální rozptyl. Pro rozptyl funkce U platí

$$\mathbf{D}^2(U) = \mathbf{E}((Y - kX - \bar{y} + k\bar{x})^2) = \mathbf{E}((Y - \bar{y})^2) + k^2\mathbf{E}((X - \bar{x})^2) - 2k\mathbf{E}((X - \bar{x})(Y - \bar{y})),$$

kde $\mathbf{D}^2(U)$ značí rozptyl funkce U, $\bar{x} = \mathbf{E}(X)$ střední hodnotu veličiny X a $\bar{y} = \mathbf{E}(Y)$ střední hodnotu veličiny Y. Předcházející vztah můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{D}^2(U) = \mathbf{D}^2(Y) + k^2\mathbf{D}^2(X) - 2kR_{XY}\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y), \qquad (1)$$

kde R_{XY} je *korelační koeficient* (koeficient korelace), který je definován vztahem

$$R_{XY} = \frac{\mathbf{E}((X - \bar{x})(Y - \bar{y}))}{\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)}. \qquad (2)$$

$R_{XY} \in <-1, 1>$ Rovnice (1) představuje vzhledem k parametru k polynom druhého stupně. Nutná podmínka pro extrém je

$$\frac{\partial \mathbf{D}^2(U)}{\partial k} = 2k\mathbf{D}^2(X) - 2R_{XY}\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y) = 0.$$

Odtud dostáváme

$$k = \frac{\mathbf{D}(Y)}{\mathbf{D}(X)} R_{XY}. \qquad (3)$$

Protože platí

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}^2(U)}{\partial k^2} = 2\mathbf{D}^2(X) \geq 0,$$

jedná se o minimum. Dosazením hodnoty k ze vztahu (3) do rovnice (1) pak dostáváme pro minimální rozptyl následující vztah, platí

$$\mathbf{D}^2_{\min}(U) = \mathbf{D}^2(Y)(1 - R^2_{XY}). \qquad (4)$$

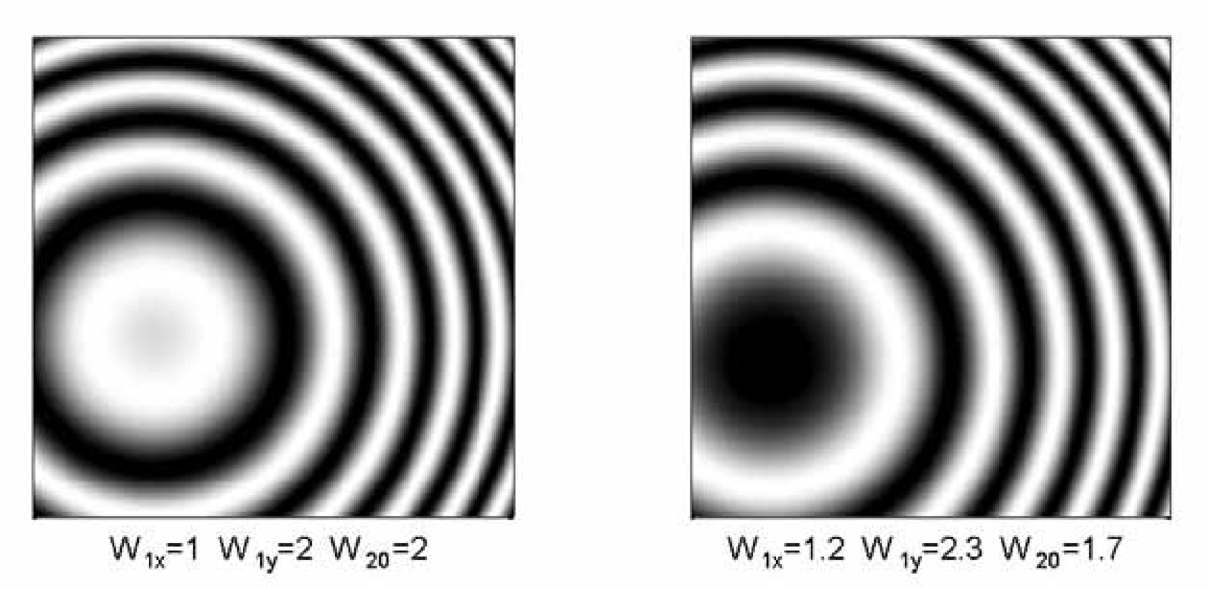
Ze vztahu (4) je patrno, že čím vyšší absolutní hodnoty korelační koeficient nabývá, tím menší je hodnota minimálního rozptylu funkce U.

Aplikujme nyní výše uvedenou teorii v praxi na *vyhodnocování shodnosti dvou interferogramů X* a Y z nichž např. interferogram X odpovídá nominální hodnotě plochy, která má být vyráběna a kontrolována a interferogram Y odpovídá reálně vyrobené a kontrolované ploše. Vzhledem k tomu, že kontrolovaná plocha nebude nikdy v prostoru zaujímat stejnou polohu jakou by zaujímala nominální plocha, bude interferogram Y značně nepodobný interferogramu X nominální plochy a to i v případě, že vyrobená plocha má identický tvar s nominální plochou. Abychom mohli interferogram Y srovnávat s interferogramem X, budeme postupovat obdobným způsobem jaký je popsán v práci [1] a přičteme k interferogramu Y funkci W_0, která má tvar

$$W_0 = W_{00} + W_{0x}x + W_{0y}y + W_{20}(x^2 + y^2)\,. \tag{5}$$

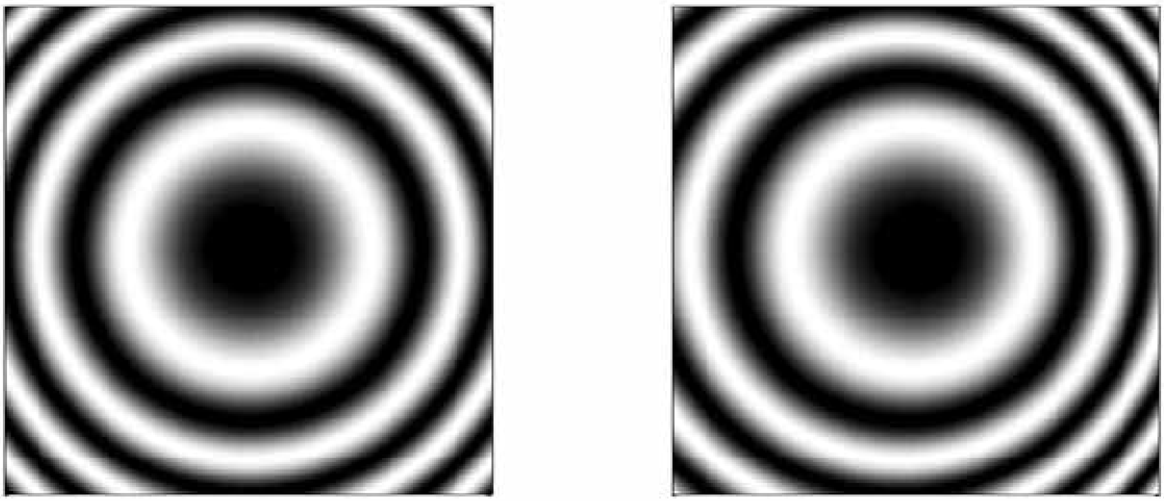
Vypočteme nyní hodnotu koeficientu korelace $R_{XY}(W_{00}, W_{0x}, W_{0y}, W_{20})$, který bude funkcí koeficientů W_{00}, W_{0x}, W_{0y} a W_{20}. Nyní použijeme optimalizační proces [4] na funkci $R_{XY}(W_{00}, W_{0x}, W_{0y}, W_{20})$ a budeme hledat takové hodnoty koeficientů W_{00}, W_{0x}, W_{0y} a W_{20}, pro které bude koeficient korelace nabývat svého maxima. Hodnota koeficientu korelace pak bude mírou odchylky kontrolované plochy od plochy nominální. Pro $R^2_{XY} = 1$ budou mít obě plochy stejný tvar.

Algoritmus uvedené metody byl naprogramován v systému Matlab a ověřen na několika modelových případech s použitím různých optimalizačních procedur. Pro testování vyhodnocovacího algoritmu byly použity optimalizační algoritmy v Matlabu a Optimization Toolboxu, jež dávají velmi dobré výsledky pro malé odchylky testované a nominální plochy. Výsledky prokázaly možnost použití této relativně jednoduché metody při kontrole tvaru optických ploch. Na **obr.1** je znázorněn případ, kdy kontrolovaná optická plocha je totožná s plochou nominální, tj. korelační koeficient $R_{XY} = 1$. Jak je možno vidět z obrázku, přestože je vzhled obou porovnávaných interferogramů značně odlišný, jedná se o interferogramy ploch, které mají identický tvar.



Obr.1: Interferogramy totožných optických ploch

Na **obr.2** jsou uvedeny interferogramy porovnávaných ploch, které se jen velmi málo odlišují. Maximální odchylka ploch je přibližně 0,3 násobky vlnové délky světla. Korelační koeficient v tomto případě je R_{XY} = 0,57. Vidíme tedy, že již při velmi malých odchylkách se korelační koeficient značně snižuje. Stanovením vhodné toleranční meze pro hodnotu korelačního koeficientu je potom možno posuzovat kvalitu kontrolovaných optických ploch.



Obr.2: Interferogramy odlišných optických ploch

3. Závěr

V práci byla uvedena relativně jednoduchá metoda pro kontrolu tvaru optických ploch v optické výrobě, která používá korelační analýzy a nelineárních optimalizačních procedur pro stanovení míry shodnosti testované plochy s nominální plochou. Analýza je prováděna vzájemným porovnáváním dvou interferogramů, z nichž jeden odpovídá nominální hodnotě plochy, která má být vyráběna a kontrolována a druhý odpovídá reálně vyrobené a kontrolované optické ploše. Algoritmus uvedené metody byl naprogramován v systému Matlab a ověřen na několika modelových případech s použitím různých optimalizačních procedur. Výsledky prokázaly možnost použití této relativně jednoduché metody při kontrole tvaru optických ploch.

Práce byla vypracována v rámci grantu GAČR 103/03/P001.

Literatura

[1] A.Mikš, *Interferometrické metody vyhodnocování sférických ploch v optice*. Jemná mechanika a optika. 2001, roč. 46, č. 1, s. 29-35.
[2] M.Francon, *Optical Interferometry*, Academic Press, N.Y. 1966.
[3] A.Mikš , *Aplikovaná optika 10*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
[4] D.H.Himmelblau, *Applied Nonlinear Programing*, McGraw-Hill, New York 1972.

Ing.Jiří Novák,PhD, Katedra fyziky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 - Dejvice.
Tel: 224354435, Fax: 233333226, E-mail: novakji@fsv.cvut.cz

Doc.RNDr.Antonín Mikš,CSc, Katedra fyziky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 - Dejvice.
Tel: 224354948, Fax: 233333226, E-mail: miks@fsv.cvut.cz