POUŽITIE INVERZNÝCH VZŤAHOV PRE VYTVORENIE LINEÁRNEHO MODELU MECHANICKEJ SÚSTAVY

Ing. Róbert Bartko[1]

Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne

Úvod

Pri vytváraní simulačných modelov, na ktorých overujeme platnosť navrhnutých postupov sa stretávame s úlohou, kde potrebujeme navrhnúť model mechanickej sústavy s predpísanými spektrálnymi alebo modálnymi vlastnosťami (napr. identifikačné úlohy). Môžu to byť napríklad požiadavky, aby model mal veľmi blízke vlastné frekvencie alebo viacnásobné vlastné tvary. Na vytváranie takýchto modelov sa dá využiť riešenie inverzného problému pasívnej alebo riadenej nekonzervatívnej sústavy navrhnuté v prácach [1] a [2].

Matematický model

Matematický model lineárnej nekonzervatívnej sústavy so sústredenými parametrami v n-rozmernom fyzikálnom priestore je v tvare sústavy diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t)+\mathbf{B}\dot{\mathbf{v}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{v}(t)=\mathbf{f}(t) \tag{1}$$

kde vo všeobecnosti je $\mathbf{M}$ regulárna nesymetrická matica nxn, $\mathbf{B}$,$\mathbf{K}$ sú singulárne nesymetrické matice nxn, $\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{v}}(t), \ddot{\mathbf{v}}(t)$ sú stĺpcové matice nx1 výchyliek, rýchlosti a zrýchlenia závislých na čase a $\mathbf{f}(t)$ je stĺpcová matica nx1 vonkajších síl závislých na čase. Vynásobením rovnice (1) zľava maticou $\mathbf{M}^{-1}$ dostávame

$$\ddot{\mathbf{v}}(t)+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\dot{\mathbf{v}}(t)+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{v}(t)=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \tag{2}$$

$$\ddot{\mathbf{v}}(t)+\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{v}}(t)+\mathbf{H}_0\mathbf{v}(t)=\mathbf{p}(t) \tag{3}$$

Rozšírením rovnice (3) o identitu

$$\mathbf{I}_{n,n}\dot{\mathbf{v}}(t)-\mathbf{I}_{n,n}\mathbf{v}(t)=\mathbf{o}_n \tag{4}$$

kde $\mathbf{I}_{n,n}$ je jednotková diagonálna matica nxn a $\mathbf{o}_n$ je nulová stĺpcová matica nx1, dostaneme spojením rovníc (3) a (4) model v $2n$-rozmernom priestore v tvare

$$\begin{bmatrix}\mathbf{H}_1 & \mathbf{I}_{n,n}\\ \mathbf{I}_{n,n} & \mathbf{O}_{n,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{v}}(t)\\ \ddot{\mathbf{v}}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\mathbf{H}_0 & \mathbf{O}_{n,n}\\ \mathbf{O}_{n,n} & \mathbf{I}_{n,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}(t)\\ \dot{\mathbf{v}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}(t)\\ \mathbf{o}_n\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t)-\mathbf{P}\mathbf{u}(t)=\mathbf{g}(t) \tag{6}$$

kde $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ sú matice $2n$x$2n$ a $\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)$ sú stĺpcové matice $2n$x1. Ak vynásobíme zľava rovnicu (6) maticou $\mathbf{N}^{-1}$ dostávame model v stavovom priestore

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{v}}(t)\\ \ddot{\mathbf{v}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n,n} & \mathbf{I}_{n,n}\\ -\mathbf{H}_0 & -\mathbf{H}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}(t)\\ \dot{\mathbf{v}}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{o}_n\\ \mathbf{p}(t)\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{h}(t) \tag{8}$$

kde matica $\mathbf{A}$ je stavová matica $2n$x$2n$ a $\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{h}(t)$ sú stĺpcové matice $2n$x1.

Problém vlastných čísel

Problém vlastných čísel pre model (3) môžeme v maticovom tvare zapísať

$$\mathbf{H}_0\mathbf{V}+\mathbf{H}_1\mathbf{V}\mathbf{D}+\mathbf{V}\mathbf{D}^2=\mathbf{O}_{n,2n}, \qquad \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_0+\mathbf{D}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_1+\mathbf{D}^2\mathbf{W}^{\mathrm{T}}=\mathbf{O}_{2n,n} \tag{9}$$

kde $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ je pravostranná, resp. ľavostranná modálna matica nx$2n$ a $\mathbf{D}$ je spektrálna matica vlastných čísel $2n$x$2n$, ktorá vo všeobecnosti môže byť v Jordanovskom kanonickom tvare.

Problém vlastných čísel pre modely dané rovnicami (6) a (8) môžeme v maticovom tvare zapisať

$$\mathbf{PU}-\mathbf{NUD}=\mathbf{0}_{2n,2n}\,, \qquad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}=\mathbf{0}_{2n,2n} \tag{10}$$

$$\mathbf{AX}-\mathbf{XD}=\mathbf{0}_{2n,2n}\,, \qquad \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}-\mathbf{D}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}_{2n,2n} \tag{11}$$

kde **P**, **Q** sú modálne matice modelu (6) $2n$x$2n$ a **X**, **Y** sú modálne matice modelu (8) $2n$x$2n$.
Problém vlastných čísel pre všetky tri modely môžeme pretransformovať na kanonický tvar

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_1\mathbf{V}+\mathbf{D}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}+\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{VD}=\mathbf{I}_{2n,2n}\,, \quad -\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_0\mathbf{V}+\mathbf{D}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{VD}=\mathbf{D} \tag{12}$$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{PU}=\mathbf{D}\,, \qquad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{NU}=\mathbf{I}_{2n,2n} \tag{13}$$

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{D}\,, \qquad \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}=\mathbf{I}_{2n,2n} \tag{14}$$

Ak porovnáme vzťahy (13) a (14) dostávame vzťahy medzi pravostrannými a ľavostrannými modálnymi maticami problému vlastných čísel pre jednotlivé modely

$$\mathbf{X}=\mathbf{U}\,, \qquad \mathbf{X}^{-1}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{N} \tag{15}$$

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{VD}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}=\left(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}\\ \mathbf{W}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{16}$$

Inverzné vzťahy

Ak upravíme vzťah (14)

$$\mathbf{XDX}^{-1}=\mathbf{A} \tag{17}$$

a použijeme vzťahy (15), (16) dostaneme rovnosť

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{VD}\end{bmatrix}\mathbf{D}\begin{bmatrix}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{H}_1 & \mathbf{I}_{n,n}\\ \mathbf{I}_{n,n} & \mathbf{O}_{n,n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n,n} & \mathbf{I}_{n,n}\\ -\mathbf{H}_0 & -\mathbf{H}_1\end{bmatrix} \tag{18}$$

Zo maticovej rovnici (18) dostaneme inverzné vzťahy

$$\mathbf{H}_0=\left(\mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\right)^2-\mathbf{V}\mathbf{D}^3\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{H}_1=-\mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

s podmienkou

$$\mathbf{VD}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}_{n,n} \tag{20}$$

Ak navrhneme nové matice, t.j. zmeníme modálne matice alebo spektrálnu maticu, potom prestáva platiť podmienka (20). Tá sa zmení na tvar

$$\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}=\mathbf{R}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \tag{21}$$

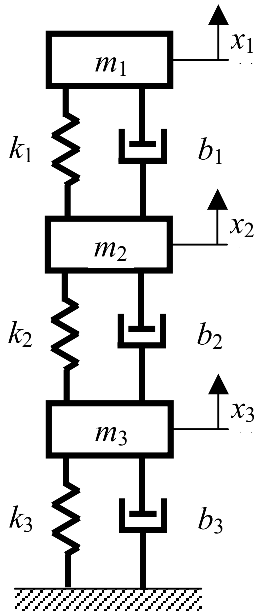
kde $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ sú trojuholníkové matice získané Choleského rozkladom. Potom nové modálne matice môžu byť v tvare

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{T}_1^{-1}\tilde{\mathbf{V}}\,,\ \mathbf{W}_1=\mathbf{T}_2^{-\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{W}}\,,\ \mathbf{D}_1=\tilde{\mathbf{D}} \tag{22}$$

Použitie inverzných vzťahov

Niekedy potrebujeme navrhnúť pre simulačné experimenty na overenie navrhnutých postupov (napr. identifikačných metód) sústavy, ktoré môžu mať veľmi blízke vlastné čísla, viacnásobné vlastné čísla, vzdialené vlastné čísla,... V tejto kapitole si ukážeme ako jednoducho takúto sústavu navrhneme.
Chceme navrhnúť sústavu, ktorá má veľmi blízke vlastné čísla. Aby sme nerobili návrh metódou pokusu a omylu, môžeme použiť inverzné vzťahy, ktoré sme uviedli v predchádzajúcej kapitole. Ak nemáme na modálne matice žiadne zvláštne požiadavky, aby sme nemuseli pracne vymýšľať, môžeme zvoliť jednoduchú sústavu, ktorej modálne a spektrálne matice jednoducho určíme. Nech požadovaná spektrálna matica je v tvare

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -2-10i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2+10i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-10{,}1i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+10{,}1i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2-10{,}2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2+10{,}2i \end{bmatrix} \tag{23}$$



Zvoľme si jednoduchú sústavu reťazového typu (Obr.1).

Obr.1 Trojhmotná sústava reťazového typu

Nech hodnoty jednotlivých hmotností, tlmení a tuhostí sú nasledovné

$$m_1{=}1, m_2{=}2, m_3{=}1, k_1{=}300, k_2{=}300, k_3{=}250, b_1{=}10, b_2{=}10, b_3{=}5 \tag{24}$$

V Tab.1 je uvedený výpočet matíc **V**, **W**, **D**

```
m1=1;m2=2;m3=1;
k1=300;k2=300;k3=250;
b1=10;b2=10;b3=5;
M=diag([m1 m2 m3]);
B=[b1 -b1 0;-b1 b1+b2 -b2;0 -b2 b2+b3];
K=[k1 -k1 0;-k1 k1+k2 -k2;0 -k2 k2+k3];
H0=inv(M)*K;
H1=inv(M)*B;
N=[-H1 eye(3);eye(3) zeros(3,3)];
N=[-H1 eye(3);eye(3) zeros(3,3)];
P=[-H0 zeros(3,3); zeros(3,3) eye(3)];
A=[zeros(3,3) eye(3);-H0 -H1];
[X,D]=jordan(vpa(A));
X=subs(X);
D=subs(D);
U=X;
UU=(inv(X)*inv(N))';
V=U(1:3,:);
W=UU(1:3,:);
```

Tab.1 Výpočet modálnych matíc a spektrálnej matice

Pri návrhu použijeme vypočítané modálne matice **V**, **W** a požadovanú spektrálnu maticu $\mathbf{D}_1$. V Tab.2 je uvedený výpočet novej sústavy v stavovom priestore, ktorá má požadované spektrálne vlastnosti dané spektrálnou maticou $\mathbf{D}_1$.

```
D1=diag([-2-10i -2+10i -2-10.1i -2+10.1i -2-10.2i -2+10.2i]);
R=V*D1*W';
[T1,T2]=lu(R);
V1=inv(T1)*V;
W1=inv(T2)'*W;
H0=((V1*D1^2*W1')^2-V1*D1^3*W1');
H1=-V1*D1^2*W1';
A=[zeros(3,3) eye(3);-H0 -H1];
```

Tab.2 Návrh novej sústavy s požadovanými spektrálnymi vlastnosťami

Záver

V článku je ukázaná jednoduchá možnosť využitia riešenia inverzného problému pre návrh sústavy s požadovanými modálnymi a spektrálnymi vlastnosťami s ukážkou návrhu sústavy s veľmi blízkymi vlastnými číslami.

Zoznam použitej literatúry

[1] Starek, L.: "Inverzný problém v kmitaní lineárnych nekonzervatívnych sústav so sústredenými parametrami." Strojnícky časopis, 40, 1989, č.6, s. 677-685.

[2] Starek, L.: "Priradenie spektrálnych a modálnych vlastností riadenej kmitajúcej mechanickej sústave." Strojnícky časopis, 41, 1990, č.5, s. 537-558.

[1] KFIM Fakulta priemyselných technológií TnU AD, T. Vansovej 1054/45, 020 32 Puchov, e-mail: bartko@tnuni.sk